数理解析研究所講究録
46巻 1968年 26-28

十分統計量に関する例

大阪市立大 商 石井 吾郎

Baranki[1] に関連した例を2つあげる.

例1 $\mathcal{P}=\{f(x,\theta)\ ;\ \theta\in\Theta\}$, $\Theta=(0,\infty)$

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\theta-1}, & 0<x<\theta \text{ のとき}\\ 0, & \text{その他}\end{cases}$$

$f(x,\theta)$ を密度関数としてもつ確率変数の独立 n 個の標本を $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ とするとき最小十分統量 $T(X)$ を求める.

$$f^m(x,\theta)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{\theta-1}{m}+1\right)}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\theta-1}e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^m},\quad 0<x<\infty$$

$$\mathcal{P}^m=\{f^m(x,\theta)\ ;\ \theta\in\Theta\}$$

とおくと. $\mathcal{P}^m$ はキャリアが θ によって変らない分布族である. $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ を $\mathcal{P}^m$ からの標本とすると, その時の最小十分統計量は

$$T^m(X)=\left(\prod_{i=1}^n x_i,\ \sum_{i=1}^n x_i^m\right)$$

である．さて

$$f^m(x,\theta) \to f(x,\theta) \quad (\text{as } m \to \infty)$$

である．このとき　$T^m(x) \to T(x)$　$(\text{as } m \to \infty)$　が

成り立つであろうか．$T^m(x)$ と同等な統計量として

$$T'^m(x) = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i,\ \sqrt[m]{\frac{1}{n}\sum_i x_i^m} \right)$$

を取ると

$$T'^m(x) \longrightarrow T(x) = \left(\prod_i x_i,\ \operatorname{Max}_i x_i \right) \quad (\text{as } m \to \infty)$$

なる $T(x)$ が $\mathcal{P}$ の十分統計量になる．

例2　$(0,\theta)$ 上の一様分布

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta} & ;\quad 0 < x < \theta \quad \text{のとき} \\ 0 & ,\quad \text{その他} \end{cases}$$

$$\mathcal{P} = \{ f(x,\theta),\ \theta \in \Theta \},\quad \Theta = (0,\infty)$$

につき例1と同様なことを考える．

$$f^m(x,\theta) = C(\theta,m)\, e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^m - \left(\frac{x}{\theta}\right)^{2m}},\quad 0 < x < \infty$$

$$\mathcal{P}^m = \{ f^m(x,\theta)\ ;\ \theta \in \Theta \}$$

$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を独立 n 個の標本とする．

X を $\mathcal{P}^m$ よりの標本とすると

$$T^m(x) = \left(\sum x_i^m,\ \sum x_i^{2m} \right)$$

が十分統計量となる．　T^m と同等な統計量として

$$T'^m(x) = \left(\sqrt[m]{\frac{1}{n}\sum x_i^m} \; , \; \sqrt[2m]{\frac{1}{n}\sum x_i^{2m}} \right)$$

を採用すると

$$T'^m(x) \longrightarrow T'(x) = (\max_i x_i \; , \; \max_i x_i) \quad (\text{as } m \to \infty)$$

である．　この $T'(x)$ は

$$T(x) = \max x_i$$

と同等である．　勿論この例においても $f^m(x,\theta)$ のキャリアは θ によらないし又 $f^m(x,\theta) \to f(x,\theta)$　$(m \to \infty)$　である．

さて例1において T^m において　$\sum x_i^m$ は $m\to\infty$ のとき発散するわけでその為に $\sqrt[m]{\frac{1}{n}\sum x_i^m}$ を T'^m において採用している．　もし $\sqrt[m^2]{\frac{1}{n}\sum x_i^m}$ を採用すればその極限の関数は十分統計量にはならない．例1を含むような一般論があるとせばその中で上手な統計量 $\sqrt[m]{\sum x_i^m/n}$ を取ると云うことに相当する議論がうまく入っているのだろうと考えられる．

次に例2において $\mathcal{P}^m$ の最小十分統計量の次元は 2 であるが $\mathcal{P}$ の最小十分統計量の次元は 1 である．
すべての m について $\dim T^m(x) = 2$ であるにもかかわらず $\dim T(x) = 1$ であるというこの例は上例の様な方法で最小十分統計量の次元を決めることのむつかしさを示していると思われる．

Ref.　Barankin [1] Sankhya vol 28　1966